

Paper Type: Original Article

Bayesian Estimation of Fractional Ornstein-Uhlenbeck Model Parameters Using the SIR Algorithm in Financial Derivatives Pricing

Parviz Nasiri^{1,*} , Amir Haj Salmani¹ , Mahdieh Tahmasebi² 

¹ Department of Statistics, Payam Noor University, Tehran, Iran; pnasiri@pnu.ac.ir; amir.salmany@gmail.com.

² Department of Mathematics, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran; mah.tahmasebi15@gmail.com.

Citation:

Received: 21 October 2023

Revised: 02 January 2024

Accepted: 04 March 2024

Nasiri, P., Haj Salmani, A., & Tahmasebi, M. (2024). Bayesian estimation of fractional Ornstein-Uhlenbeck model parameters using the sir algorithm in financial derivatives pricing. *Journal of Quality Engineering and Management*, 14(3), 217-223.

Abstract

Purpose: This paper aims to accurately estimate the parameters of the fractional Ornstein-Uhlenbeck model using the Bayesian method and the SIR simulation algorithm and to compare its performance with the Maximum Likelihood Estimation (MLE) method in the context of stochastic differential models with long-memory properties. The paper also seeks to evaluate the efficiency of the Bayesian approach in similar models, particularly in analyzing financial data with long-term dependencies.

Methodology: In this study, the parameters of the fractional Ornstein-Uhlenbeck model are estimated for the first time using the Bayesian method, with appropriate prior distributions and the SIR algorithm employed for simulation. The efficiency of the Bayesian estimator is compared to the MLE estimator based on RMSE and variance indices.

Findings: The results demonstrate that the Bayesian estimator provides more accurate parameter estimates than the Maximum Likelihood method. Moreover, with an increase in the degree of long-term dependency on the data, the accuracy of estimates improves under both methods; however, the Bayesian approach consistently outperforms the MLE. Additionally, the parameter σ is estimated with higher precision compared to the parameters k and μ .

Originality/Value: The originality of this paper lies in the application of the SIR algorithm to estimate the parameters of the fractional Ornstein-Uhlenbeck model. This approach has not been previously explored. This innovation represents a significant contribution to the application of Bayesian methods for estimating parameters in stochastic differential models with long-memory properties, and it opens new avenues for applying similar techniques to models like the Heston model in future research.

Keywords: Long-term memory models, Heston model, Fractional Ornstein Uhlenbeck model, Fractional model, SIR algorithm, Bayesian estimation, Maximum likelihood method.

 Corresponding Author: pnasiri@pnu.ac.ir

 10.48313/jqem.2025.513308.1507



Licensee System Analytics. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



نوع مقاله: پژوهشی

برآورد بیزی پارامترهای مدل ارنشتاین النبگ کسری با استفاده از الگوریتم SIR در قیمت گذاری

مشتقات مالی

پرویز نصیری^{۱*}، امیر حاج سلمانی^۱، مهدیه طماسبی^۲

^۱گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.

^۲گروه ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران.

چکیده

هدف: هدف این مقاله، برآورد دقیق پارامترهای مدل ارنشتاین-النبگ کسری با استفاده از روش بیزی و الگوریتم شبیه سازی SIR و مقایسه عملکرد آن با روش ماکسیمم درستمایی در زمینه مدل های دیفرانسیل تصادفی دارای حافظه بلندمدت است. همچنین، مقاله در پی بررسی کارایی روش بیزی در مدل های مشابه، به ویژه در تحلیل داده های مالی با وابستگی بلندمدت می باشد.

روش شناسی پژوهش: در این تحقیق، پارامترهای مدل ارنشتاین-النبگ کسری برای اولین بار به روش بیزی و با در نظر گرفتن توزیع های پیشین مناسب، توسط الگوریتم SIR شبیه سازی و برآورد شده اند. کارایی برآوردگر بیزی با برآوردگر ماکسیمم درستمایی بر اساس شاخص های $RMSE$ و واریانس مقایسه شده است.

یافته ها: نتایج نشان دادند که برآوردگر بیزی نسبت به روش ماکسیمم درستمایی، دقت بیشتری در برآورد پارامترهای مدل دارد. همچنین، با افزایش میزان وابستگی بلندمدت بین داده ها، دقت برآوردها در هر دو روش افزایش می یابد، اما در همه حالت ها روش بیزی عملکرد بهتری از خود نشان می دهد. دقت برآورد پارامتر σ نسبت به پارامترهای دیگر (k و μ) بیشتر بوده است.

اصالت/ارزش افزوده علمی: اصالت این مقاله در به کارگیری الگوریتم SIR برای برآورد پارامترهای مدل ارنشتاین-النبگ کسری است که در تحقیقات پیشین مورد توجه قرار نگرفته بود. این کار نوآوری مهمی در استفاده از روش های بیزی در برآورد مدل های دیفرانسیل تصادفی با حافظه بلندمدت به شمار می رود و زمینه را برای برآورد پارامترهای مدل های مشابه (مانند مدل هستون) در پژوهش های آتی فراهم می کند.

کلیدواژه ها: مدل های حافظه بلند مدت، مدل هستون، مدل کسری اورنشتاین اولنیک، مدل کسری، الگوریتم SIR ، تخمین بیزی، روش حداکثر درستمایی.

۱- مقدمه

در دهه ۱۹۷۰ فیشر بلک، مایرون اسکولز و رابرت مرتون مدل بلک شولز مرتون را ارائه دادند که باعث تغییر اساسی در بررسی قیمت گذاری مشتقات مالی، اقتصادی و تئوری قیمت گذاری از جمله سهام به عنوان دارایی شد [1] و در نهایت منجر به یک مدل دیفرانسیل تصادفی گردید. در این مدل فرض می شود ارزش دارایی از یک حرکت براونی با واریانس ثابت پیروی می کند و ساختار سرمایه شرکت شامل بدهی و حقوق صاحبان سهام است [2]. با اضافه کردن تغییرات تصادفی به معادله دیفرانسیل تصادفی $\frac{d}{dt}X_t = b(t, X_t), X(0) = 0$ می توان خطاهای اندازه گیری و معادله دیفرانسیل تصادفی را به صورت

$$X_{(t+\Delta t)} - X_t = \mu(t, X_t)\Delta t + U(t, X_t)\Delta B_t, \quad (1)$$

در نظر گرفت. یورک [3] معادله دیفرانسیل تصادفی خطی مربوط به رابطه (۱) را به صورت

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dB_t, \quad (2)$$

ارایه داد که حالت ساده‌ای از معادلات دیفرانسیل تصادفی است و دارای کاربرد فراوان در علوم مختلف بخصوص قیمت‌گذاری سهام می‌باشد. یکی از انواع معادلات دیفرانسیل تصادفی که به صورت دو فاکتوری نمایش داده می‌شود، مدل هستون^۱ [4] است.

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu X_t dt + U_t X_t dB_t, \\ dU_t &= (\mu - kU_t)dt + \sigma_t dB_t \end{aligned} \quad (3)$$

است که در آن X_t قیمت سهام و U_t ارزش دارایی در زمان t می‌باشند؛ عبارت دوم رابطه (۳) را مدل ارنشتاین النبگ OU می‌نامند که در آن k نرخ بازگشت، μ جمله رانشی و B_t چنانکه قبلاً ذکر شد فرآیند براونی است و بردار پارامترهای مدل در این حالت $\Theta = (k, \mu, \sigma_t)$ می‌باشد. در ابتدا کاربرد مدل ارنشتاین النبگ در فیزیک به عنوان مدلی برای سرعت یک ذره عظیم براونی تحت تاثیر اصطکاک بود. این نام از لئونارد اورنشتاین و جورج یوجین اولنیک گرفته شده و یک فرآیند ثابت گاوس مارکوف است، به این معنی که یک فرآیند گاوسی، یک فرآیند مارکوف و از نظر زمانی همگن است. این مدل تنها فرآیند غیر پیش پا افتاده‌ای است که شرط‌های را برآورده دارای است و امکان تبدیل خطی متغیرهای مکان و زمان را فراهم می‌کند. با گذشت زمان، فرآیند به سمت عملکرد میانگین خود حرکت می‌کند، چنین فرآیندی بازگشت میانگین نامیده می‌شود.

این مدل را می‌توان به عنوان فرآیند اتورگرسیو مرتبه گسسته در نظر گرفت [5]. با توجه به این مزیت‌ها مدل ارنشتاین النبگ در حالت کسری (این مدل در بخش بعدی معرفی می‌گردد) در مقاله حاضر مورد بررسی قرار گرفته است.

۲- مدل ارنشتاین النبگ کسری^۲

با توجه به کاربرد وسیع مدل‌های باحافظه بلندمدت در مباحث مالی و اقتصادی و مزایای مدل ارنشتاین النبگ با جایگزینی حرکت براونی استاندارد B_t با حرکت براونی کسری B_t^H و ثابت در نظر گرفتن σ_t در عبارت سمت راست رابطه (۳) مدل ارنشتاین النبگ کسری به فرم زیر به دست می‌آید که موضوع اصلی مقاله حاضر می‌باشد:

$$dV_t = (\mu - kV_t)d_t + \sigma dB_t^H \quad (4)$$

و در آن پارامتر H ، ضریب هارست^۳ مقدار ضریب کسری یا تفاضل گیری مدل را تعیین می‌کند و مقدار آن $0 < H < 1$ است [6]. به ازای $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ و مقادیر n مشاهدات فرآیند V_t دارای خاصیت وابستگی بلندمدت و برای $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ و مقادیر بزرگ n فرآیند ایستا با تابع همبستگی منفی است [3]. در مقاله حاضر مقادیر $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ در نظر گرفته می‌شود. بردار پارامترهای مدل در رابطه (۲) $\Theta = \{k, \mu, \sigma\}$ است. تحقیقات مختلفی از گذشته تاکنون برای بررسی خواص و برآورد پارامترهای مدل دیفرانسیل کسری بخصوص مدل ارنشتاین النبگ کسری انجام شده است. از جمله ماندلبرو و ولس [7] یک مدل دیفرانسیل تصادفی از حرکت براونی کسری برای برخی از خواص بلندمدت سوابق ژئوفیزیکی با کاربرد در منابع آب به دست آوردند. فینک [8] با استفاده از الگوی معادلات دیفرانسیل تصادفی و ارنشتاین النبگ، فرآیند لوی کسری^۴ را بررسی کرده است. وی از معادله دیفرانسیل تصادفی $dX_t = \mu(X_t)d_t + \sigma(X_t)dL_t^d, t \in \mathbb{R}$ استفاده کرد که در آن L^p فرآیند لوی کسری P بعدی است. باجا [9] با گسترش روش‌های گذشته از روش حداقل مربعات برای برآورد پارامترهای مدل ارنشتاین النبگ کسری استفاده کرده است. وی مقدار پارامتر هارست را $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ اختیار کرده است و در مورد توزیع مجانبی میانگین دوره‌ای فرآیند ارنشتاین النبگ کسری بحث کرده است.

¹ Heston

² Fractional

³ Hurst

⁴ Fractional Lévy Process (FLP)

چن و همکاران [10] به بررسی مدل ارنشتاین النبگ کسری مختلط با جملات نویزی مختلط پرداختند. همچنین هو و همکاران [11] با استفاده از روش برآورد حداقل مربعات به بررسی همگرایی برآوردهای پارامترهای مدل ارنشتاین النبگ کسری پرداختند. خواص نظری مدل ارنشتاین النبگ کسری برای تمام مقادیر پارامتر کسری $H \in (0,1)$ و چندین رویکرد برای قیمت‌گذاری اختیار معامله به‌وسیله میسورا [12] مورد بررسی قرار گرفت. فلاح و همکاران [13] از معادله به فرم $d\sigma_t = \frac{1}{2}(\frac{k}{Y_t} - aY_t)dt + \frac{\sigma}{2}dB_t^H$ استفاده کرده‌اند. آن‌ها به بررسی وجود و منحصر به فرد بودن حل معادله پرداخته‌اند. همچنین تاثیر مقادیر مختلف پارامترهای مدل بر جواب معادله $dY_t = k(\theta - Y_t)dt + \sigma dB_t^H$ را بررسی کردند. حارث [14] با فرض $(X_t)_{t \geq 0}$ به‌عنوان فرآیند ارنشتاین النبگ کسری و مشاهدات در زمان‌های گسسته به فاصله زمانی h $t_k = kh, k = 0, 1, \dots, 2n+2$ برآورد پارامترهای مدل را با استفاده از شبیه‌سازی به‌دست آورده و سازگاری و همگرایی برآوردها را ثابت کرده است. در مقالات اشاره‌شده برای برآورد پارامترهای مدل ارنشتاین النبگ کسری تاکنون از روش بیزی استفاده نشده است، لذا در این مقاله برآورد بیزی پارامترهای مدل ارنشتاین النبگ کسری به ازای $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ با روش SIR ارایه می‌شود و نتایج حاصل از آن با روش ماکسیمم درستنمایی مقایسه می‌شود.

۳- الگوریتم SIR

الگوریتم SIR یک تکنیک مبتنی بر شبیه‌سازی برای تولید توزیع‌های پیش‌بین و فیلتر متوالی برای مدل‌های فضای حالت غیرخطی یا غیرگوسی است. این روش مبتنی بر مجموعه‌ای از نقاط است که برای نمایش توزیع متغیرهای $f(V_{t_i}|D_{i'}, \Theta)$ استفاده می‌شود و از قانون بیز با تکرار برای وزن دادن به توزیع‌ها استفاده می‌شود. برای مجموعه $D_N = \{S_{t_i}; i, \dots, N\}$ بردار سری زمانی قیمت سهام در بازه‌های زمانی برابر $t_{i+1} - t_i = h$ است. این روش توسط دوان [15] برای مدل مرتون با حضور جمله نویز برای برآورد بردار پارامتر $\Theta = (k, \mu, \sigma_t)$ مورد استفاده قرار گرفت. او از روش SIR برای شبیه‌سازی استفاده کرد و برای داده‌های شرکت داو جونز برآورد پارامترها را به‌دست آورد.

با توجه به استفاده از روش بیزی در روش SIR نیاز است توزیع پیشین بردار پارامترها مشخص شود. در این فرآیند به دلیل نامشخص بودن تابع چگالی $f(V_{t_i}|D_{i'}, \Theta)$ ، برآورد تجربی آن $f(V_{t_i}|D_{i'}, \Theta)$ با استفاده از مجموعه M نقطه $\{V_{t_i}^m, m = 1, \dots, M\}$ با وزن‌های مساوی برآورد به‌دست می‌آید. با توجه به اینکه در مقاله حاضر بر اساس مدل ارنشتاین النبگ کسری به فرم رابطه (۴) نمونه‌ای از مدل به‌دست می‌آید. به‌وسیله بردار مشاهدات حاصل، تابع چگالی تجربی با استفاده از رابطه (۵) محاسبه می‌شود.

$$f(V_{t_{i+1}}|D_{i'}, \Theta) \propto \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M f(V_{t_{i+1}}|V_{t_i}^m, \Theta). \quad (5)$$

با استفاده از قانون بیز در زمان ith ، $f(V_{t_{i+1}}|D_{i+1}, \Theta)$ با استفاده از تابع چگالی فیلترینگ برآورد می‌شود:

$$f(V_{t_{i+1}}|D_{i+1}, \Theta) \approx f(S_{t_{i+1}}|V_{t_{i+1}}, \Theta)f(V_{t_{i+1}}|D_{i'}, \Theta). \quad (6)$$

رابطه‌های (۵) و (۶) به‌عنوان فرآیند تولید مجموعه نقاط با وزن‌های مساوی در زمان $i+1th$ با استفاده از زمان ith هستند. الگوریتم SIR به‌طور مبسوط شامل مراحل زیر است:

گام ۱- یک نمونه M تایی از توزیع $f(V_{t_{i+1}}|D_{i'}, \Theta)$ تولید می‌شود. تولید مشاهدات برای زمان ith بردار نمونه‌ای مشاهدات $\{V_{t_i}^m, m = 1, \dots, M\}$ با وزن برابر از توزیع $f(V_{t_{i+1}}|V_{t_i}^m, \Theta)$ و بر اساس مدل ارنشتاین النبگ رابطه (۴) انجام می‌شود. برای تولید نمونه از رابطه (۴) مقادیر پیش فرض بردار پارامترها ابتدا تعیین می‌شوند. برای بررسی اثر مقدار پارامتر کسری و اندازه نمونه بر دقت برآورد و مقایسه بین کارایی دو روش ماکسیمم درستنمایی و SIR ، شبیه‌سازی برای مقادیر مختلف حجم نمونه و پارامتر کسری انجام می‌شود. پس از تولید نمونه اولیه از مدل استفاده از رابطه (۵) مقدار $f(V_{t_i}|D_{i'}, \Theta)$ برآورد و در نتیجه $V_{t_i}^m$ تولید می‌شود.

گام ۲- برای مشاهدات $V_{t_{i+1}}^m$ وزن های $\pi_{i+1}^{(m)} = \frac{w_{i+1}^{(m)}}{\sum_{i=1}^m w_{i+1}^{(m)}}$ تولید می شود. به طوری که $w_{i+1}^{(m)} = f(S_{t_{i+1}} | V_{t_{i+1}}^{(m)}, \Theta)$ و بر اساس رابطه (۶) انجام می شود. تعیین توزیع $f(S_{t_{i+1}} | V_{t_{i+1}}^{(m)}, \Theta)$ با توجه به موضوع مقاله حاضر بر اساس مدل ارنشتاین النبگ کسری رابطه (۴) و مشاهدات تولید شده از گام اول در ادامه ارایه می شود.

گام ۳- به وسیله نمونه موزون تولید شده در مرحله قبل، نمونه $\{(V_{t_{i+1}}^m, \pi_{t_{i+1}}^m), m = 1, \dots, M\}$ به حجم M تا رسیدن به نمونه ای با وزن های برابر تولید می گردد.

انجام نمونه گیری های مجدد در مرحله سوم حائز اهمیت می باشد، زیرا با تکرار نمونه گیری ثبات و پایداری مشاهدات افزایش و خطاهای تصادفی کاهش می یابد. همچنین گام اول بدون در نظر گرفتن توزیع $f(S_{t_{i+1}} | V_{t_{i+1}}^{(m)}, \Theta)$ می باشد و نمونه گیری مجدد منجر به رفع این نقص می شود [15].

برآوردگرهای حاصل از روش SIR دارای توزیع مجانبی نرمال $\hat{\Theta} \sim N(\Theta_0, A_N^{-1})$ است که در آن Θ_0 بردار مقادیر صحیح پارامتر و $A_N = -\frac{\partial^2 L(\Theta; D_N)}{\partial \Theta \partial \Theta'} |_{\Theta = \hat{\Theta}}$ است و در آن $L(\Theta; D_N)$ لگاریتم تابع درستمایی است.

تعیین توزیع $f(V_{t_{i+1}} | V_{t_i}^m, \Theta)$: چنانکه ذکر شد نیاز به تعیین توزیع تابع چگالی $\hat{f}(V_{t_{i+1}} | D_i, \theta)$ است که وابسته به توزیع $f(V_{t_{i+1}} | V_{t_i}^m, \Theta)$ است و برای تعیین آن به روش زیر عمل می کنیم [15]. با استفاده از خواص رابطه اوایلر [16] داریم:

$$\begin{aligned} \Delta V_t &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} (K - \mu V_s) ds + \sigma \Delta B_t^H \\ \Rightarrow V_{t_{i+1}} &= V_{t_i} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (K - \mu V_s) ds + \sigma \Delta B_t^H, \end{aligned} \quad (7)$$

که در نتیجه آن برای فرایند براونی کسری [11]

$$\Delta B_t^H \sim N(0, H(2H-1)(t_{i+1} - t_i)^{2H-2}), \quad (8)$$

بنابراین با استفاده از رابطه (۸) و مدل ارنشتاین النبگ کسری رابطه (۲) داریم:

$$f(V_{t_{i+1}} | V_{t_i}) \sim N((\mu - kV_{t_i})\Delta t, \sigma^2 H(2H-1)\Delta t^{2H-2}). \quad (9)$$

تعیین توزیع $f(S_{t_{i+1}} | V_{t_{i+1}}, \Theta)$: با جایگزینی رابطه $d_t = \frac{\ln(V_t F) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T^H - t^H)}{\sigma \sqrt{T^H - t^H}}$ در معادله استاندارد ارزش اختیار معامله اروپایی روی دارایی پایه V_t به فرم $S_t = V_t \phi(d_t) - Fe^{-r(T-t)} \phi(d_t - \sigma \sqrt{T^H - t^H})$ است و با در نظر گرفتن دارایی پایه V_t به صورت $(V_t - F)^+$ داریم [15]:

$$S_t = V_t \phi \left(\frac{\overbrace{\ln(V_t F) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T^H - t^H)}^{d_t}}{\sigma \sqrt{T^H - t^H}} \right) - Fe^{-r(T-t)} \phi(d_t - \sigma \sqrt{T^H - t^H}). \quad (10)$$

با استفاده از خاصیت وارون پذیری داریم $V_{t_{i+1}} = S^{-1}(S_{t_{i+1}})$ و در نتیجه

$$f(V_{t_{i+1}})(S^{-1})'(S_{t_{i+1}}) = f_{S_{t_{i+1}}}(S_{t_{i+1}}) \Rightarrow f(V_{t_{i+1}}) = \frac{f_{S_{t_{i+1}}}(S_{t_{i+1}})}{S^{-1}(S_{t_{i+1}})}. \quad (11)$$

با کاربرد خاصیت وارون پذیری توابع مرکب داریم [17]

$$f(V_{t_{i+1}}) = f(S_{t_{i+1}})S'(V_{t_{i+1}}). \quad (12)$$

به طوری که مشتق S'_t در رابطه (۱۲) برابر است با

$$S'_t = \phi(d_t) + V_t \phi'(d_t) \left(\frac{1}{V_t \sigma \sqrt{T^H - t^H}} \right) - Fe^{-r(T-t)} \phi'(d_t - \sigma \sqrt{T^H - t^H}) \left(\frac{1}{V_t \sigma \sqrt{T^H - t^H}} \right). \quad (13)$$

با فاکتورگیری از جمله $\frac{1}{\sigma \sqrt{T^H - t^H}}$ و در نظر گرفتن مشتق توزیع نرمال استاندارد رابطه (۱۳) را می توان به صورت

$$S'_t = \phi(d_t) + \frac{1}{\sigma \sqrt{T^{2H} - t^{2H}}} \quad (14)$$

$$\left[e^{-\frac{d_t^2}{2}} - \frac{F}{V_t} e^{r(T-t)} e^{-\frac{d_t^2}{2}} e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T^{2H} - t^{2H})} e^{d_t \sigma \sqrt{T^{2H} - t^{2H}}} \right].$$

نوشت. با استفاده از تعریف d_t در رابطه (۱۴) خواهیم داشت:

$$e^{d_t \sigma \sqrt{T^{2H} - t^{2H}}} = \frac{V_t}{F} \cdot e^{r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T^{2H} - t^{2H})}. \quad (15)$$

پس از جایگذاری رابطه (۱۵) در رابطه (۱۴) و ساده کردن آن داریم:

$$S'_t = \phi(d_t), \quad (16)$$

با استفاده از رابطه (۱۶) می‌توان رابطه (۱۱) را به صورت

$$f(V_{t_{i+1}}) = f_{S_{t_{i+1}}}(S_{t_{i+1}}) \phi(d_t), \quad (17)$$

نوشت. در نتیجه با توجه به توزیع $f(V_{t_{i+1}} | V_{t_i})$ رابطه (۹) و توزیع استاندارد $\phi(d_t)$ ، توزیع $f(S_{t_{i+1}} | V_{t_{i+1}}, \Theta)$ از تقسیم دو توزیع نرمال به دست می‌آید که می‌توان در شبیه‌سازی استفاده کرد [18].

۴- شبیه‌سازی

برای ارزیابی دقت برآوردها با استفاده از الگوریتم SIR و روش ماکسیمم درستنمایی با توجه به بردار پارامترهای مدل ارنشتاین النینگ کسری $\Theta = (k, \mu, \sigma_t)$ از شاخص‌ها $RMSE^1$ و واریانس برآوردها استفاده می‌شود. برای مقایسه بهتر بین دو روش برآورد مقادیر مختلف شبیه‌سازی برای اندازه‌های نمونه به اندازه‌های $n = 50, 100, 200, 500$ و پارامتر کسری مدل $h = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ انجام شده است. اگر V_t ارزش شرکت در زمان t هم توزیع حرکت براونی کسری باشد، بر اساس معادله ارنشتاین النینگ کسری موضوع مقاله در رابطه (۴) مقادیر اولیه برای پارامترهای مدل $\mu = 0.4, \sigma = 0.3, k = 0.5$ در نظر گرفته می‌شود.

نمونه تصادفی از فرآیند ارنشتاین النینگ کسری (V_t) تولید و با جایگذاری مقادیر V_t در رابطه (۱۱) توزیع $f(V_{t_{i+1}} | V_{t_i})$ در زمان t_{i+1} را برحسب زمان t_i به دست می‌آید. در مرحله بعد با استفاده مقادیر $w_{i+1}^{(m)} = f(S_{t_{i+1}} | V_{t_{i+1}}^{(m)}, \Theta)$ و در نتیجه $\pi_{t_{i+1}}^{(m)}$ محاسبه می‌شود. سپس زوج‌های $\{(V_{t_{i+1}}^{(m)}, \pi_{t_{i+1}}^{(m)})\}$ تولید و در مرحله سوم نمونه‌های جدید با وزن‌های مساوی به حجم M به دست می‌آید. برای محاسبه برآورد بیزی بردار پارامترهای مدل در روش SIR نیاز به تعیین توزیع پیشین پارامترهای $\Theta = (k, \mu, \sigma_t)$ است. با توجه به محدوده مقادیر تعریف شده برای پارامترها توزیع پیشین پارامترهای k, σ یکنواخت با حدود مثبت و توزیع پیشین پارامتر μ نرمال در نظر گرفته می‌شود. نتایج شبیه‌سازی و مقایسه کارایی دو روش در برآورد بردار پارامترها به کمک شاخص‌های معیار $RMSE$ و واریانس بردار پارامتر در جدول ۱ و جدول ۲ آورده شده است.

بر اساس نتایج جدول ۲ می‌توان گفت که دقت برآوردها بیزی پارامترها در مقایسه روش ماکسیمم درستنمایی بیشتر است. درعین حال با افزایش مقدار پارامتر هارست و وابستگی بلندمدت (H) در بیشتر موارد مقدار شاخص $RMSE$ افزایش و به عبارت دیگر دقت برآورد کاهش می‌یابد اما تغییر در اندازه نمونه تاثیری در دقت برآوردها ندارد.

¹ Root-Mean-Square Error (RMSE)

جدول ۱- مقادیر RMSE ناشی از برآوردها روش ماکسیمم درستنمایی و بیزی پارامترها برای مقادیر مختلف n و H .
Table 1- RMSE values resulting from maximum likelihood and Bayesian parameter estimates for different values of n and H .

n	H	σ		μ		k	
		Bayes	MLE	Bayes	MLE	Bayes	MLE
50	0.6	0.080431	0.250103	0.408769	0.593087	0.192432	0.276713
	0.7	0.140174	0.241463	0.417882	0.560390	0.176738	0.252612
	0.8	0.189489	0.239984	0.408852	0.527540	0.172564	0.227594
	0.9	0.232997	0.241881	0.409160	0.470112	0.167519	0.185946
100	0.6	0.159728	0.155463	0.422835	0.639863	0.189301	0.304548
	0.7	0.159728	0.155463	0.422835	0.639863	0.189301	0.304548
	0.8	0.208440	0.163350	0.437849	0.564033	0.190968	0.265128
	0.9	0.247199	0.171047	0.413453	0.463239	0.192177	0.203814
200	0.6	0.095480	0.150225	0.473312	0.587787	0.161384	0.206970
	0.7	0.161848	0.154366	0.471515	0.558001	0.180845	0.218561
	0.8	0.209866	0.161475	0.460544	0.531867	0.173715	0.202891
	0.9	0.247592	0.168712	0.449655	0.470253	0.163833	0.167731
500	0.6	0.112167	0.070873	0.458700	0.632757	0.172312	0.248653
	0.7	0.183668	0.112992	0.495513	0.595925	0.184174	0.232977
	0.8	0.229902	0.139026	0.489330	0.559079	0.186962	0.215452
	0.9	0.269455	0.154031	0.824668	0.487964	0.240708	0.178381

بر اساس نتایج جدول ۲ می‌توان گفت که دقت برآوردها بیزی پارامترها در مقایسه روش ماکسیمم درستنمایی بیشتر است که نشان‌دهنده پراکندگی کمتر برآوردها حاصل از روش بیزی نسبت به روش ماکسیمم درستنمایی است و افزایش مقدار وابستگی بلندمدت (پارامتر هارست H) در هر دو روش در بیشتر موارد باعث کاهش پراکندگی مشاهدات شده است.

جدول ۲- مقادیر واریانس ناشی از برآوردها به روش ماکسیمم درستنمایی و بیزی پارامترها برای مقادیر مختلف n و H .
Table 2- Variance values resulting from maximum likelihood and Bayesian parameter estimates for different values of n and H .

n	H	σ		μ		k	
		Bayes	MLE	Bayes	MLE	Bayes	MLE
50	0.6	0.000625	0.036215	0.157712	0.349426	0.034746	0.076320
	0.7	0.000386	0.041133	0.176318	0.317155	0.031548	0.064453
	0.8	0.000236	0.045433	0.168406	0.280260	0.029964	0.051952
	0.9	0.000116	0.049325	0.166992	0.221192	0.027930	0.034299
100	0.6	0.000112	0.023538	0.174304	0.390132	0.035665	0.090500
	0.7	0.000112	0.023538	0.174304	0.390132	0.035665	0.090500
	0.8	0.000064	0.026918	0.183425	0.312466	0.035599	0.070066
	0.9	0.000031	0.029466	0.172459	0.214201	0.037305	0.041782
200	0.6	0.000110	0.018085	0.204758	0.314934	0.025551	0.041599
	0.7	0.000051	0.023100	0.223021	0.311672	0.032651	0.047639
	0.8	0.000032	0.026267	0.211703	0.285466	0.030279	0.041446
	0.9	0.000018	0.028723	0.196242	0.223268	0.026444	0.028404
500	0.6	0.000040	0.003718	0.198109	0.369709	0.028007	0.057500
	0.7	0.000022	0.005427	0.243653	0.344124	0.033719	0.052778
	0.8	0.000016	0.006931	0.240476	0.308171	0.035122	0.045732
	0.9	0.000011	0.008079	0.205906	0.237632	0.027510	0.031514

۵- نتیجه‌گیری

با بررسی و جمع‌بندی نتایج حاصل از مقاله می‌توان گفت که برآوردها بیزی در مقایسه با برآوردها ماکسیمم درستنمایی از دقت بیشتری برخوردار است. همچنین با افزایش میزان وابستگی بلندمدت دقت افزایش در هر دو روش افزایش می‌یابد و میزان دقت برآورد برای پارامتر σ بیشتر از پارامترهای k و μ است. با توجه به عدم استفاده از روش بیزی و به‌طور خاص الگوریتم SIR در برآورد پارامترهای مدل ارنشتاین النبگ کسری در تحقیقات گذشته، کاربرد روش بیزی را در برآورد پارامترهای مدل‌های دیفرانسیل تصادفی و مشتقات آن بررسی و نتایج آن را مورد مقایسه قرار می‌دهیم. سورنسن [19] به بررسی روش‌های برآورد موجود فرایندهای انتشار و ارگودیک از جمله روش بیز پرداخت و نشان داد تحت شرایط خاص عملکردی مشابه روش EMM دارد.

دوان [15] روش SIR را برای برآورد بردار پارامتر $\Theta = \{\sigma, \delta, \mu\}$ در مدل مرتون با حضور جمله نویز استفاده کرد. او با استفاده از شبیه‌سازی و کاربرد داده‌های شرکت داو جونز نشان داد برای مدل‌های بدون نویز برآوردها با روش SIR کارایی بهتری دارند که با نتایج حاصل از این مقاله برای مدل

ارنشتاین النبگ کسری مطابقت دارد. همچنین آلمو [20] از روش SIR در معادلات دیفرانسیل تصادفی برای مدل سازی محاسبه تعداد افراد در یک جمعیت بسته که در یک دوره زمانی معین حساس، آلوده یا بهبود یافته اند استفاده کرد. به این صورت که یک مدل SIR تصادفی بدون حضور نرخ تولد و مرگ در جمعیت برای تجزیه و تحلیل انتقال بیماری کالا آزار مورد استفاده قرار گرفت. نتایج حاصل از تحقیق بیانگر تصادفی بودن (ماهیت تصادفی) پویایی جمعیت آلوده کالا آزار با استفاده از این روش و کارایی آن در برآورد پارامترها بود که تاییدکننده توانمندی روش SIR در برآورد پارامتر مدل های مشابه می باشد. با توجه به موارد فوق که موید کارایی برآورد بیزی پارامترها در مدل های دیفرانسیل تصادفی است، پیشنهاد می گردد برآورد پارامترهای مدل هستون به فرم رابطه (۳) با استفاده از الگوریتم SIR در تحقیقات آتی مورد بررسی قرار بگیرد.

منابع

- [1] Karlsson, P. (2009). *The heston model-stochastic volatility and approximation*. <https://lup.lub.lu.se/luur/download?func=downloadFile&recordId=1436827&fileId=1646914>
- [2] Di, B., & Liao, Y. (2013). Structural credit risk model with stochastic volatility: A particle-filter approach. *SSRN electronic journal*, 1–33. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2336452>
- [3] Björk, T. (2009). *Arbitrage theory in continuous time*. Oxford university press. <https://b2n.ir/un1562>
- [4] Mardani, Z., & Tahmasabi, M. (2016). *Examining the structure of credit models under stochastic fluctuations* [Thesis]. (In Persian). https://elmnet.ir/doc/10997393-81224?elm_num=1
- [5] Cooper, N., Thomas, G. H., Venditti, C., Meade, A., & Freckleton, R. P. (2016). A cautionary note on the use of Ornstein-Uhlenbeck models in macroevolutionary studies. *Biological journal of the linnean society*, 118(1), 64–77. <https://doi.org/10.1111/bij.12701>
- [6] Xiao, W., Zhang, W., & Xu, W. (2011). Parameter estimation for fractional Ornstein-Uhlenbeck processes at discrete observation. *Applied mathematical modelling*, 35(9), 4196–4207. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.02.047>
- [7] Mandelbrot, B. B., & Wallis, J. R. (1969). Some long-run properties of geophysical records. *Water resources research*, 5(2), 321–340. <https://doi.org/10.1029/WR005i002p00321>
- [8] Fink, H., & Klüppelberg, C. (2011). Fractional Lévy-driven Ornstein-Uhlenbeck processes and stochastic differential equations. *Bernoulli*, 17(1), 484–506. <http://dx.doi.org/10.3150/10-BEJ281>
- [9] Bajja, S., Es-Sebaii, K., & Viitasaari, L. (2017). Least squares estimator of fractional Ornstein-Uhlenbeck processes with periodic mean. *Journal of the korean statistical society*, 46(4), 608–622. <https://doi.org/10.1016/j.jkss.2017.06.002>
- [10] Chen, Y., Hu, Y., & Wang, Z. (2017). *Parameter estimation of complex fractional Ornstein-Uhlenbeck processes with fractional noise*. ArXiv Preprint ArXiv:1701.07568. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1701.07568>
- [11] Hu, Y., & Nualart, D. (2010). Parameter estimation for fractional Ornstein-Uhlenbeck processes. *Statistics & probability letters*, 80(11), 1030–1038. <https://doi.org/10.1016/j.spl.2010.02.018>
- [12] Mishura, Y. (2019). *Fractional stochastic volatility: F-Ornstein-Uhlenbeck and F-CIR processes*. Minsk: BSU. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/233340>
- [13] Fallah, S., Ali Reza, N., & Mehrdoust, F. (2019). A fractional version of the Cox-Ingersoll-Ross interest rate model and pricing double barrier option with Hurst index $H \in (23, 1)$. *Communications in statistics - theory and methods*, 48(9), 2254–2266. <https://doi.org/10.1080/03610926.2018.1464580>
- [14] Haress, E. M., & Hu, Y. (2021). Estimation of all parameters in the fractional Ornstein-Uhlenbeck model under discrete observations. *Statistical inference for stochastic processes*, 24, 327–351. <https://link.springer.com/journal/11203>
- [15] Duan, J. C., & Fulop, A. (2009). Estimating the structural credit risk model when equity prices are contaminated by trading noises. *Journal of econometrics*, 150(2), 288–296. <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2008.12.003>
- [16] Hutzenhaler, M., Jentzen, A., & Kloeden, P. E. (2013). Divergence of the multilevel Monte Carlo Euler method for nonlinear stochastic differential equations. *Annals of applied probability*, 23(5). <https://b2n.ir/wk3765>
- [17] Capiński, M., & Kopp, P. E. (2004). *Measure, integral and probability* (Vol. 14). Springer. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4471-0645-6#about-book-reviews>
- [18] Oliveira, A., Oliveira, T., Macías, S., & Antonio, A. (2015). Distribution function for the ratio of two normal random variables. *AIP conference proceedings* (Vol. 1648). AIP Publishing. <https://doi.org/10.1063/1.4913045>
- [19] Sørensen, H. (2004). Parametric inference for diffusion processes observed at discrete points in time: a survey. *International statistical review*, 72(3), 337–354. <https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2004.tb00241.x>
- [20] Alemu, S. S. (2022). *A stochastic model for kala-azar transmission dynamics in libo kemkem, Ethiopia*. <https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-1210143/v1>